

МАТЕМАТИКА 1

ЛЕКЦИЈА 9

2 – Л9 КРИВА КАО ХОДОГРАФ ВЕКТОР-ФУНКЦИЈЕ

Појам вектор-функције

Вектор-функција једне реалне независно променљиве – функција $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ чији домен је неки подскуп скупа \mathbf{R} , а кодомен је скуп вектора. За сваки t из домена такве функције, вредност функције је неки вектор $\overrightarrow{r(t)}$. Координате x , y , z тог вектора зависе од t . Скаларне функције $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, које изражавају ту зависност, називају се *координатним функцијама*. Изучавање вектор-функције може се сматрати истовременим изучавањем њених координатних функција.

Ходограф вектор-функције $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$: ако вектор $\overrightarrow{r(t)}$ за сваки t из домена има почетак у координатном почетку O координатног система $Oxyz$, тада крајеви свих тих вектора $\overrightarrow{r(t)}$ образују скуп тачака који се назива *ходографом вектор-функције* $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$.

Гранична вредност вектор-функције

Дефиниција граничне вредности вектор-функције у датој тачки. Нека је $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ једна вектор функција дефинисана на скупу E и нека је a нека тачка нагомилавања скупа E . За вектор \vec{u} каже се да је *гранична вредност функције* $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ кад $t \rightarrow a$, или у тачки a , и пише се

$$\lim_{t \rightarrow a} \overrightarrow{r(t)} = \vec{u},$$

ако је

$$\lim_{t \rightarrow a} \left| \overrightarrow{r(t)} - \vec{u} \right| = 0.$$

Налажење граничне вредности вектор-функције у некој тачки своди се на налажење граничних вредности њених координатних функција у истој тачки.

Теорема. Ако је $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t), z(t))$ за $t \in E$, $a \in E'$, и $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, тада

$$\lim_{t \rightarrow a} \overrightarrow{r(t)} = \vec{u} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow a} x(t) = \alpha \wedge \lim_{t \rightarrow a} y(t) = \beta \wedge \lim_{t \rightarrow a} z(t) = \gamma.$$

Доказ – самостално.

За граничне вредности вектор-функција важе основна правила аналогна оним за граничне вредности скаларних функција.

Теорема. Нека су вектор-функције $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ и $\vec{s} = \overrightarrow{s(t)}$, као и скаларна функција $f = f(t)$, дефинисане (бар) на скупу E , нека је a нека тачка нагомилавања скупа E , и нека постоје граничне вредности

$$\lim_{t \rightarrow a} \overrightarrow{r(t)} = \vec{u}, \quad \lim_{t \rightarrow a} \overrightarrow{s(t)} = \vec{v}, \quad \lim_{t \rightarrow a} f(t) = l.$$

Тада:

1⁰ постоји гранична вредност збира $\overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{s(t)}$ кад $t \rightarrow a$ и једнака је $\vec{u} + \vec{v}$;

2⁰ постоји гранична вредност производа $f(t) \overrightarrow{r(t)}$ кад $t \rightarrow a$ и једнака је $l \vec{u}$;

3⁰ постоји гранична вредност скаларног производа $\overrightarrow{r(t)} \cdot \overrightarrow{s(t)}$ кад $t \rightarrow a$ и једнака је $\vec{u} \cdot \vec{v}$;

4⁰ постоји гранична вредност векторског производа $\overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{s(t)}$ кад $t \rightarrow a$ и једнака је $\vec{u} \times \vec{v}$;

5⁰ ако је још и $l \neq 0$, постоји гранична вредност количника $\frac{\overrightarrow{r(t)}}{f(t)}$ кад $t \rightarrow a$

и једнака је $\frac{\vec{u}}{l}$.

Доказ — примена претходне теореме и основних правила о граничним вредностима скаларних функција.

Непрекидност вектор-функције

Дефиниција непрекидности вектор-функције у датој тачки. Нека је вектор-функција $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ дефинисана на скупу E и нека је $t_0 \in E \cap E'$. За функцију $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ каже се да је непрекидна у тачки t_0 ако има граничну вредност у тој тачки једнаку $\overrightarrow{r(t_0)}$.

Теорема. Вектор-функција $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ је непрекидна у тачки t_0 ако и само ако су њене координатне функције $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ непрекидне у тој тачки. Доказ — самостално.

Теорема. Нека су вектор-функције $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ и $\vec{s} = \overrightarrow{s(t)}$, као и скаларна функција $f = f(t)$, дефинисане (бар) на скупу E , и нека су непрекидне у тачки $t_0 \in E \cap E'$. Тада су и функције $t \rightarrow \overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{s(t)}$, $t \rightarrow f(t) \overrightarrow{r(t)}$, $t \rightarrow \overrightarrow{r(t)} \cdot \overrightarrow{s(t)}$,

$t \rightarrow \overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{s(t)}$, непрекидне у тачки t_0 , а ако је још и $f(t_0) \neq 0$ онда је и функција $t \rightarrow \frac{\overrightarrow{r(t)}}{f(t)}$ непрекидна у тачки t_0 . Доказ – самостално.

Извод вектор-функције

Дефиниција извода вектор-функције у датој тачки. Нека је вектор-функција $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)}$ дефинисана на скупу E и нека је t_0 једна унутрашња тачка скупа E . Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{r(t_0 + \Delta t)} - \overrightarrow{r(t_0)}}{\Delta t},$$

тада се та гранична вредност назива *изводом функције $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)}$ у тачки t_0* , и обележава се са $\overrightarrow{r'(t_0)}$.

Теорема. Ако је $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t), z(t))$ за $t \in E$, тада извод вектор функције $\overrightarrow{r'(t_0)}$ постоји ако и само ако постоје изводи њених координатних функција: $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ и $z'(t_0)$, и важи $\overrightarrow{r'(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Доказ – самостално.

Теорема. Нека су вектор-функције $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)}$ и $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s(t)}$, као и скаларна функција $f = f(t)$, дефинисане (бар) на скупу E , нека је t_0 нека унутрашња тачка скупа E , и нека постоје изводи $\overrightarrow{r'(t_0)}$, $\overrightarrow{s'(t_0)}$ и $f'(t_0)$. Тада:

1⁰ постоји извод збира $\overrightarrow{r(t)} + \overrightarrow{s(t)}$ у тачки t_0 и једнак је $\overrightarrow{r'(t_0)} + \overrightarrow{s'(t_0)}$;

2⁰ постоји извод производа $f(t) \overrightarrow{r(t)}$ у тачки t_0 и једнак је

$$f'(t_0) \overrightarrow{r(t_0)} + f(t_0) \overrightarrow{r'(t_0)};$$

3⁰ постоји извод скаларног производа $\overrightarrow{r(t)} \cdot \overrightarrow{s(t)}$ у тачки t_0 и једнак је $\overrightarrow{r'(t_0)} \cdot \overrightarrow{s(t_0)} + \overrightarrow{r(t_0)} \cdot \overrightarrow{s'(t_0)}$;

4⁰ постоји извод векторског производа $\overrightarrow{r(t)} \times \overrightarrow{s(t)}$ у тачки t_0 и једнак је $\overrightarrow{r'(t_0)} \times \overrightarrow{s(t_0)} + \overrightarrow{r(t_0)} \times \overrightarrow{s'(t_0)}$;

5⁰ ако је још и $f(t_0) \neq 0$, постоји извод количника $\frac{\overrightarrow{r(t)}}{f(t)}$ у тачки t_0 и једнак

$$\text{је } \frac{f(t_0) \overrightarrow{r'(t_0)} - f'(t_0) \overrightarrow{r(t_0)}}{[f(t_0)]^2}.$$

Доказ – примена претходне теореме и основних правила о изводима скаларних функција.

Диференцијабилност и диференцијал вектор-функције у датој тачки — дефинишу се на исти начин као што је то раније учињено за скаларне функције. Такође, на исти начин се доказује и да је вектор-функција диференцијабилна у

датој тачки ако и само ако има извод у тој тачки. Диференцијабилност и диференцијал вектор-функције свде се на диференцијабилност и диференцијале њених координатних функција, исто као гранична вредност, непрекидност и извод. Ознака диференцијала вектор-функције $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ у тачки t_0 при прираштају dt независно променљиве — $d\vec{r}(t_0, dt)$.

Изводи и диференцијали виших редова вектор-функције — дефинишу се као раније за скаларне функције. Ознаке: $\overrightarrow{r^{(n)}(t_0)}$ или $\frac{d^n \vec{r}(t_0)}{dt^n}$, $d^n \vec{r}(t_0, dt)$. Уместо $\overrightarrow{r'(t_0)}$, $\overrightarrow{r''(t_0)}$, $\overrightarrow{r'''(t_0)}$ често се пише $\dot{\vec{r}}(t_0)$, $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, $\dddot{\vec{r}}(t_0)$, или $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, $\dddot{\vec{r}}$.

Појам криве

Дефиниција криве. Ходограф било које непрекидне вектор-функције дефинисане на неком интервалу назива се *кривом*. Ако је крива C ходограф вектор-функције $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$, дефинисане (и непрекидне) на неком интервалу E , тада се каже да је крива C задата (векторском) једначином $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$, $t \in E$, и пише се

$$C: \vec{r} = \overrightarrow{r(t)}, t \in E. \quad (1)$$

Ако је притом $\overrightarrow{r(t)} = (x(t), y(t), z(t))$ за $t \in E$, тада се, уместо векторском једначином, крива C може задати скаларним једначинама $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, што се овако записује:

$$C: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in E. \quad (2)$$

Ово је задавање криве параметарским једначинама (t је параметар). Ако је притом M нека тачка криве C , тада је њен вектор положаја \overrightarrow{OM} једнак $\overrightarrow{r(t)}$ за неки $t \in E$, тј. њене координате су једнаке $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, за неки $t \in E$. То се записује овако: $M = M(t)$.

Дефиниција просте криве. Нека је крива C задата векторском једначином (1) или параметарским једначинама (2). Ако је притом тачка $M(t_1)$ различита од тачке $M(t_2)$ за сваке две различите тачке t_1 и t_2 интервала E , од којих је бар једна унутрашња, тада се каже да је C једна *проста крива*. Ако је у (1), односно у (2), $E = [\alpha, \beta]$ и $M(\alpha) = M(\beta)$, тада се C назива *затвореном кривом*.

Оријентација просте криве (1), односно (2), у *смеру пораста (опадања) параметра t* — оријентација при којој је тачка $M(t_1)$ испред тачке $M(t_2)$ тачно онда кад је $t_1 < t_2$ ($t_1 > t_2$).

Дефиниција глатке криве. За криву C задату векторском једначином (1) каже се да је *глатка у тачки $M(t_0)$* ($t_0 \in E$) ако вектор-функција $\vec{r} = \overrightarrow{r(t)}$ има непрекидан извод у тачки t_0 , различит од нуле. Ако је крива C задата параметарским једначинама (2), онда је она глатка у тачки $M(t_0)$ ($t_0 \in E$) ако су-

функције $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ непрекидно диференцијабилне у тачки t_0 и бар један од извода $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ и $z'(t_0)$ је различит од нуле. Ако је крива глатка у свакој својој тачки, каже се да је она једна *глатка крива*.

Дефиниција тангенте криве. Нека је C једна проста крива и M_0 једна тачка те криве. Права l се назива *тангентом криве C у тачки M_0* ако је

$$\lim_{C \ni M \rightarrow M_0} \frac{d(M, l)}{d(M, M_0)} = 0.$$

Може се доказати да је тангента криве у датој тачки јединствена.

Теорема. Нека је проста крива C задата векторском једначином (1) и нека је $t_0 \in E$. Ако постоји $\dot{\vec{r}}(t_0)$ и различит је од нуле, тада је права l која садржи тачку $M(t_0)$ и паралелна је вектору $\dot{\vec{r}}(t_0)$, тангента криве C у тачки $M(t_0)$. Доказ — на вежбама (АГ).

Под условима из ове теореме, вектор $\dot{\vec{r}}(t_0)$ својим смером одређује једну оријентацију на правој l . Ту оријентацију зваћемо оријентацијом у смеру пораста параметра t .

Природни триједар

Дефиниција природног триједра криве у датој тачки. Нека је C једна проста крива задата векторском једначином (1) и оријентисана у смеру пораста параметра t . Нека је $M = M(t)$ ма која тачка те криве. Вектор $\vec{\tau} := \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ назива се *јединичним вектором тангенте криве C у тачки M* . (Овде, а и у наставку, подразумевамо, без посебног истицања, да сваки извод који употребимо постоји, и да је сваки израз који се појави у имениоцу неког разломка различит од нуле.)

Вектор $\vec{n} := \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|}$ назива се *јединичним вектором главне нормале криве C у тачки*

M , а вектор $\vec{b} := \vec{\tau} \times \vec{n}$ назива се *јединичним вектором бинормале криве C у тачки M* . Вектори $\vec{\tau}$, \vec{n} и \vec{b} заједно чине *природни триједар (основни триједар, фундаментални триједар) криве C у тачки M* ако им је свима почетак тачка M . Лако је видети да су то јединични узајамно ортогонални вектори и да уређена тројка $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ има десну оријентацију. Заправо, треба показати само да је $\vec{\tau} \perp \vec{n}$, тј. да је $\vec{\tau} \perp \dot{\vec{\tau}}$, а то следи отуд што $\vec{\tau}$ има константан интензитет, па је извод скаларног производа $\vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}}$ једнак нули (показати самостално). Сем вектора $\vec{\tau}$, \vec{n} и \vec{b} , елементима природног триједра сматрамо и њихове носаче: *тангенту T , главну нормалу N и бинормалу B криве C у тачки M* , као и равни одређене тим правим: *оскулаторну раван ($\supset T, N$), нормалну раван ($\supset N, B$) и ректификациону раван ($\supset B, T$) криве C у тачки M* .

Изразићемо јединичне векторе \vec{n} и \vec{b} природног триједра помоћу вектора $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$. Ако ставимо $\frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} = \mu$, тада имамо $\vec{\tau} = \mu \dot{\vec{r}}$ и $\dot{\vec{\tau}} = \dot{\mu} \dot{\vec{r}} + \mu \ddot{\vec{r}}$. Отуд следи $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{\tau}} = \mu \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$. Како $\dot{\vec{r}}$ има исти правац и смер као $\vec{\tau}$, а $\dot{\vec{\tau}}$ исти правац и смер као \vec{n} , то $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{\tau}}$, па и $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$, има исти правац и смер као $\vec{\tau} \times \vec{n}$, тј. као \vec{b} . Зато је $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$. Кад су $\vec{\tau}$ и \vec{b} одређени, тада се \vec{n} може израчунати на следећи начин: $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}$.

Кривина и торзија

Крива у простору, у општем случају, одступа од тангенте ("извија се") и од оскулаторне равни ("уврће се"). Прво одступање мери се кривином, а друго торзијом.

Дефиниција кривине криве у датој тачки. Нека је C једна проста крива задата векторском једначином (1) и оријентисана у смеру пораста параметра t . Нека је $M = M(t)$ ма која тачка те криве. *Кривином K (првом кривином, флексијом) криве C у тачки M* назива се интензитет вектора $\vec{K} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \mu \dot{\vec{\tau}}$. Овај

вектор назива се *вектором кривине*, а број $\frac{1}{K}$ *полупречником кривине криве C у тачки M* . Дакле, $K = \frac{|\dot{\vec{\tau}}|}{|\dot{\vec{r}}|} = \mu |\dot{\vec{\tau}}|$ и $\vec{K} = K \vec{n}$.

Израчунавање кривине. Показаћемо да је

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}. \quad (3)$$

Из $\vec{K} = K \vec{n}$, $\vec{K} = \mu \dot{\vec{\tau}}$ и $\dot{\vec{\tau}} = \dot{\mu} \dot{\vec{r}} + \mu \ddot{\vec{r}}$ следи $K \vec{n} = \mu (\dot{\mu} \dot{\vec{r}} + \mu \ddot{\vec{r}})$. Векторским множењем последње једнакости вектором $\vec{\tau} = \mu \dot{\vec{r}}$ с леве стране, добија се $K \vec{\tau} \times \vec{n} = \mu^3 \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$. Како је $|\vec{\tau} \times \vec{n}| = |\vec{b}| = 1$ и $\mu = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}$, то се, преласком на интензитете, из последње једнакости два вектора добија формула (3).

Дефиниција торзије криве у датој тачки. Нека је C једна проста крива задата векторском једначином (1) и оријентисана у смеру пораста параметра t .

Нека је $M = M(t)$ ма која тачка те криве. Вектор $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{b}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \mu \dot{\vec{b}}$ назива се *вектором торзије криве C у тачки M* . Тај вектор је колинеаран са вектором \vec{n} , јер је ортогоналан на \vec{b} и на $\vec{\tau}$, а вектор \vec{n} је једнак $\vec{b} \times \vec{\tau}$. Прва од споменутих ортогоналности, тј. $\vec{T} \perp \vec{b}$, следи из $\dot{\vec{b}} \perp \vec{b}$, а друга, тј. $\vec{T} \perp \vec{\tau}$, следи из

$\vec{T} = \mu \dot{\vec{b}} = \mu (\dot{\vec{\tau}} \times \vec{n} + \vec{\tau} \times \dot{\vec{n}}) = \mu (\vec{\tau} \times \dot{\vec{n}})$. Торзијом криве C у тачки M назива се број T такав да је $\vec{T} = -T \vec{n}$. Притом се број $\frac{1}{T}$ назива полупречником торзије криве C у тачки M .

Израчунавање торзије. Показаћемо да је

$$T = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}. \quad (4)$$

Полазимо од малопре установљене једнакости $\vec{T} = \mu (\vec{\tau} \times \dot{\vec{n}})$, па у њој замењујемо \vec{n} њему једнаким вектором $\lambda \dot{\vec{\tau}}$, где је $\lambda = \frac{\mu}{K}$. (С обзиром на $K \vec{n} = \mu \dot{\vec{\tau}} (= \vec{K})$.) Тако добијамо једнакост $\vec{T} = \mu [\vec{\tau} \times (\lambda \dot{\vec{\tau}} + \lambda \ddot{\vec{\tau}})]$. У наставку ову једнакост множимо скаларно вектором $\vec{n} = \lambda \dot{\vec{\tau}}$, узевши притом у обзир да је $\vec{T} = -T \vec{n}$. На тај начин добијамо $-T = \mu \lambda [\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}, \ddot{\vec{\tau}}]$, односно, после сређивања, $T = \mu \lambda^2 [\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}, \ddot{\vec{\tau}}]$. Како је $\vec{\tau} = \mu \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{\tau}} = \mu \ddot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{\tau}} = \mu \ddot{\ddot{\vec{r}}} + 2\dot{\mu} \ddot{\vec{r}} + \mu \ddot{\ddot{\vec{r}}}$, то је $T = \mu^4 \lambda^2 [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\ddot{\vec{r}}}]$. Најзад, овде стављамо $\lambda = \frac{\mu}{K}$ и $K = \mu^3 |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|$, и тако добијамо (4).

Кривина равне криве

Формула (3) важи, разуме се, и у случају да је C равна крива, тј. крива у равни Oxy . Тада се C може приказати као ходограф вектор функције са две координате: $C: \vec{r} = (x(t), y(t))$, $t \in E$. Зато је $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$ и $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$, па из (3) излази

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Специјално, ако је крива C у равни Oxy задата једначином $y = y(x)$, $x \in E$, тада је $x = t$ и $y = y(t)$, па је $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = y'$ и $\ddot{y} = y''$, и зато

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Круг кривине равне криве

Дефиниција круга кривине равне криве. Нека је C једна проста крива у равни Oxy , нека је M нека тачка те криве и K кривина криве C у тачки M . Кругом кривине криве C у тачки M назива се круг k у равни Oxy , чији полупречник R је једнак $\frac{1}{K}$, који додирује криву C у тачки M , а центар S му се налази (на нормали криве C у тачки M) са конкавне стране криве. Притом се центар круга k назива центром кривине криве C у тачки M .

Израчунавање координата центра кривине. Извешћемо формуле за координате центра кривине $S(\xi, \eta)$ равне криве C у тачки $M(x, y)$ на кривој, у случају кад је крива задата једначином $y = y(x)$, $x \in E$. Најпре ћемо проверити да је вектор \vec{n} усмерен на конкавну страну криве C . Како је овде x параметар, то је вектор $\vec{\tau}$ усмерен у смеру рашћења x . Како је $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, где је $\alpha = \alpha(x)$ угао који $\vec{\tau}$ образује са x -осом, оријентисан од x -осе ка $\vec{\tau}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), то је

$$\vec{n} = \alpha'(-\sin \alpha, \cos \alpha) \frac{1}{|\alpha'|} = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}(-\sin \alpha, \cos \alpha). \text{ Како је } \alpha = \arctg y', \text{ то је}$$

$$\alpha' = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Према томе, ако је $y'' > 0$, тада је $\vec{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, а то је вектор усмерен навише ($\cos \alpha > 0$), дакле на конкавну страну криве C , а ако је $y'' < 0$, тада је вектор $\vec{n} = -(-\sin \alpha, \cos \alpha) = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ усмерен наниже, дакле опет на конкавну страну криве C .

На основу претходног, $\overrightarrow{MS} = R\vec{n}$. Разликоваћемо два случаја: $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Први случај: $\vec{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$, $\overrightarrow{MS} = (\xi - x, \eta - y) = R\vec{n} = (-R\sin \alpha, R\cos \alpha)$
 $\Rightarrow \xi - x = -R\sin \alpha, \eta - y = R\cos \alpha; \quad \vec{r} = (x, y), \quad \vec{r}' = (1, y'), \quad \vec{\tau} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}(1, y'),$

$$\vec{\tau} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}, \sin \alpha = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}};$$

$$\xi = x - R \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = x - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y',$$

$$\eta = y + R \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} = y + \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Други случај: сада се мења само ово: $\vec{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ и $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{-y''}$, а остало

је исто, тако да ће се добити исти резултат као и у првом случају.

Еволута и еволвента. Скуп свих центара кривине равне криве C назива се *еволутом криве C* . То је обично нека крива. За ту криву полазна крива C је *еволвента*.